1

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{1}{2\cdot3\cdot4}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot3\cdot4}-\frac{1}{3\cdot4\cdot5}\right)+$$

$$\cdots+\left\{\frac{1}{n(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{(n+1)(n+2)(n+3)-6}{6(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{n(n+2)(n+3)+(n+2)(n+3)-6}{18(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{n(n^2+5n+6)+n^2+5n}{18(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{n(n^2+6n+11)}{18(n+1)(n+2)(n+3)}$$　・・・(答)

2

(1)

略解

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OL}}+s\overrightarrow{\mathrm{LR}}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\a-1\\a-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2s\\1+s(a-1)\\1+s(a-1)\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+t\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\begin{pmatrix}1\\a+1\\a\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\-(a+1)\\-(a-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\a+1-t(a+1)\\a-t(a-1)\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}+u\overrightarrow{\mathrm{NQ}}=\begin{pmatrix}1\\a\\a+1\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}0\\1-a\\-(a+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\a-u(a-1)\\a+1-u(a+1)\end{pmatrix}$$

よって，$\begin{cases}2-2s=1\\1+s(a-1)=a+1-t(a+1)=a-u(a-1)\\1+s(a-1)=a-t(a-1)=a+1-u(a+1)\end{cases}$

これを解くと $s=\dfrac{1}{2}$ が得られるので， $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\begin{pmatrix}1\\\dfrac{a+1}{2}\\\dfrac{a+1}{2}\end{pmatrix}$

よって，点 $\mathrm{D}\left(1,\dfrac{a+1}{2},\dfrac{a+1}{2}\right)$ で交わる。

(2)

略解

$$\overrightarrow{\mathrm{DO}}=\begin{pmatrix}-1\\-\dfrac{a+1}{2}\\-\dfrac{a+1}{2}\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{DA}}=\begin{pmatrix}1\\-\dfrac{a+1}{2}\\\dfrac{-a+3}{2}\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{DB}}=\begin{pmatrix}1\\\dfrac{-a+3}{2}\\-\dfrac{a+1}{2}\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{DC}}=\begin{pmatrix}-1\\\dfrac{3a-1}{2}\\\dfrac{3a-1}{2}\end{pmatrix}$$

条件より，

$$\begin{aligned}1+\left(-\frac{a+1}{2}\right)^2+\left(-\frac{a+1}{2}\right)^2&=1+\left(-\frac{a+1}{2}\right)^2+\left(\frac{-a+3}{2}\right)^2\\&=1+\left(\frac{-a+3}{2}\right)^2+\left(-\frac{a+1}{2}\right)^2\\&=1+\left(\frac{3a-1}{2}\right)^2+\left(\frac{3a-1}{2}\right)^2\end{aligned}$$

これを解くと $a=1$　・・・(答)

3

$(x,y)=\left(\dfrac{2a\cos\alpha}{1+\cos\alpha},\dfrac{2a\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\right)$ $(0<\alpha<\pi)$ を曲線 A,

$(x,y)=\left(\dfrac{2b\cos\beta}{1-\cos\beta},\dfrac{2b\sin\beta}{1-\cos\beta}\right)$ $(0<\beta<\pi)$ を曲線 B とすると,

曲線 A について,

$$\left(\frac{dx}{d\alpha},\frac{dy}{d\alpha}\right)=\left(\frac{-2a\sin\alpha(1+\cos\alpha)-2a\cos\alpha(-\sin\alpha)}{(1+\cos\alpha)^2},\frac{2a\cos\alpha(1+\cos\alpha)-2a\sin\alpha(-\sin\alpha)}{(1+\cos\alpha)^2}\right)$$
$$=\left(-\frac{2a\sin\alpha}{(1+\cos\alpha)^2},\frac{2a}{1+\cos\alpha}\right)$$

よって, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\alpha}}{\frac{dx}{d\alpha}}=\dfrac{\frac{2a}{1+\cos\alpha}}{-\frac{2a\sin\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}}=-\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

曲線 B について,

$$\left(\frac{dx}{d\beta},\frac{dy}{d\beta}\right)=\left(\frac{-2b\sin\beta(1-\cos\beta)-2b\cos\beta\sin\beta}{(1-\cos\beta)^2},\frac{2b\cos\beta(1-\cos\beta)-2b\sin\beta\sin\beta}{(1-\cos\beta)^2}\right)$$
$$=\left(-\frac{2b\sin\beta}{(1-\cos\beta)^2},-\frac{2b}{1-\cos\beta}\right)$$

よって, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\beta}}{\frac{dx}{d\beta}}=\dfrac{-\frac{2b}{1-\cos\beta}}{-\frac{2b\sin\beta}{(1-\cos\beta)^2}}=\dfrac{1-\cos\beta}{\sin\beta}$

ここで, $\alpha=A$, $\beta=B$ のとき曲線 A と曲線 B が点 P で交わるとすると,

$\mathrm{P}\left(\dfrac{2a\cos A}{1+\cos A},\dfrac{2a\sin A}{1+\cos A}\right)=\left(\dfrac{2b\cos B}{1-\cos B},\dfrac{2b\sin B}{1-\cos B}\right)$

よって, $\dfrac{2a\cos A}{1+\cos A}=\dfrac{2b\cos B}{1-\cos B}$ ・・・① $\dfrac{2a\sin A}{1+\cos A}=\dfrac{2b\sin B}{1-\cos B}$ ・・・②

$A\neq\dfrac{\pi}{2},B\neq\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$\dfrac{②}{①}$ より, $\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{\sin B}{\cos B}$ $\therefore \tan A=\tan B$

これと $0<A<\pi$, $0<B<\pi$ $\left(A\neq\dfrac{\pi}{2},B\neq\dfrac{\pi}{2}\right)$ より,

$\tan A = \tan B$ であるためには，$A = B$ であることが必要である。

よって，$\mathrm{P}\left(\dfrac{2a\cos A}{1+\cos A}, \dfrac{2a\sin A}{1+\cos A}\right) = \left(\dfrac{2b\cos A}{1-\cos A}, \dfrac{2b\sin A}{1-\cos A}\right)$ ・・・③

また，

曲線 A の点 P における接線の方程式は，$y - \dfrac{2a\sin A}{1+\cos A} = -\dfrac{1+\cos A}{\sin A}\left(x - \dfrac{2a\cos A}{1+\cos A}\right)$

よって，この接線と x 軸との交点 Q の x 座標は，

$-\dfrac{2a\sin A}{1+\cos A} = -\dfrac{1+\cos A}{\sin A}\left(x - \dfrac{2a\cos A}{1+\cos A}\right)$ より，$x - \dfrac{2a\cos A}{1+\cos A} = \dfrac{2a\sin^2 A}{(1+\cos A)^2}$

$$
\begin{aligned}
\therefore x &= \frac{2a\sin^2 A}{(1+\cos A)^2} + \frac{2a\cos A}{1+\cos A} \\
&= \frac{2a\sin^2 A + 2a\cos A(1+\cos A)}{(1+\cos A)^2} \\
&= \frac{2a(1+\cos A)}{(1+\cos A)^2} \\
&= \frac{2a}{1+\cos A}
\end{aligned}
$$

$\therefore \mathrm{Q}\left(\dfrac{2a}{1+\cos A}, 0\right)$ ・・・④

曲線 B の点 P における接線の方程式は，$y - \dfrac{2b\sin A}{1-\cos A} = \dfrac{1-\cos A}{\sin A}\left(x - \dfrac{2b\cos A}{1-\cos A}\right)$ $(\because A = B)$

よって，この接線と x 軸との交点 Q の x 座標は，

$-\dfrac{2b\sin A}{1-\cos A} = \dfrac{1-\cos A}{\sin A}\left(x - \dfrac{2b\cos A}{1-\cos A}\right)$ より，$x - \dfrac{2b\cos A}{1-\cos A} = \dfrac{-2b\sin^2 A}{(1-\cos A)^2}$

$$
\begin{aligned}
\therefore x &= \frac{-2b\sin^2 A}{(1-\cos A)^2} + \frac{2b\cos A}{1-\cos A} \\
&= \frac{-2b\sin^2 A + 2b\cos A(1-\cos A)}{(1-\cos A)^2} \\
&= \frac{-2b(1-\cos A)}{(1-\cos A)^2} \\
&= -\frac{2b}{1-\cos A}
\end{aligned}
$$

$\therefore \mathrm{R}\left(-\dfrac{2b}{1-\cos A}, 0\right)$ ・・・⑤

ここで，③より，$\dfrac{2a\cos A}{1+\cos A} = \dfrac{2b\cos A}{1-\cos A}$

これと④，⑤より，$\mathrm{OQ}=\mathrm{OR}$　・・・⑥

また，

$$\mathrm{OP}=\sqrt{\left(\frac{2a\cos A}{1+\cos A}\right)^2+\left(\frac{2a\sin A}{1+\cos A}\right)^2}$$

$$=\frac{2a}{1+\cos A}\quad(\because a>0)$$

$$=\mathrm{OQ}\quad・・・⑦$$

ゆえに，⑥，⑦より，$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}=\mathrm{OR}$

$A=B=\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$\mathrm{P}(0,2a)=(0,2b)$

$\mathrm{Q}(2a,0)$，$\mathrm{R}(-2b,0)$

よって，$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}=\mathrm{OR}$

以上より，$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}=\mathrm{OR}$ が成り立つ。

4

(1)

$$\int_0^{\pi} x(\sin x)|\cos x|dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\sin x\cos xdx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\cos xdx$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2xdx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\sin 2xdx\right\}$$

ここで，積分定数を C_1 とおくと，

$$\int x\sin 2xdx = -\frac{x\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\int \cos 2xdx$$
$$= -\frac{x\cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C_1$$
$$= \frac{\sin 2x - 2x\cos 2x}{4} + C_1$$

より，

$$\int_0^{\pi} x(\sin x)|\cos x|dx = \frac{1}{2}\left[\left[\frac{\sin 2x - 2x\cos 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{\sin 2x - 2x\cos 2x}{4}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(2\times\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{\pi}{2}$$

(2)

$$f(y) = \int_0^{\pi} (x-y)^2 (\sin x)|\cos x|dx$$
$$= \int_0^{\pi} x^2 (\sin x)|\cos x|dx - 2y\int_0^{\pi} x(\sin x)|\cos x|dx + y^2\int_0^{\pi} \sin x|\cos x|dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin 2xdx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2\sin 2xdx\right) - 2y\int_0^{\pi} x\sin x|\cos x|dx + \frac{y^2}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2xdx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2xdx\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin 2xdx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2\sin 2xdx\right) - \pi\cdot y + \frac{y^2}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2xdx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2xdx\right)$$

ここで，積分定数を C_2 とすると，

$$\int x^2\sin 2xdx = -\frac{x^2\cos 2x}{2} + \int x\cos 2xdx$$
$$= -\frac{x^2\cos 2x}{2} + \frac{x\sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\int \sin 2xdx$$
$$= -\frac{x^2\cos 2x}{2} + \frac{x\sin 2x}{2} + \frac{1}{4}\cos 2x + C_2$$

よって，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 2x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 \sin 2x dx = \left[-\frac{x^2 \cos 2x}{2} + \frac{x \sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\frac{x^2 \cos 2x}{2} + \frac{x \sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= 2 \times \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4} \right) - \left(-\frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{4}\pi^2 - 1$$

また，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x dx = \left[-\frac{\cos 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\frac{\cos 2x}{2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= 2$$

ゆえに，

$$f(y) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\pi^2 - 1 \right) - \pi \cdot y + \frac{y^2}{2} \cdot 2$$

$$= y^2 - \pi \cdot y + \frac{3}{8}\pi^2 - \frac{1}{2}$$

$$= \left(y - \frac{\pi}{2} \right)^2 + \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}$$

であり，

これより求める最小値は，の $y = \frac{\pi}{2}$ のとき，$\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}$　・・・(答)